IV. — Les procédés de calcul.

La méthode de Pingré ne présentait rien de spécial. Ce n'était qu'un calcul d'angle horaire, et nous ne nous en occuperons pas. Au contraire, la réduction de la distance de la Lune à un astre posait un problème particulier, le plus compliqué de tous les problèmes de la navigation astronomique. Il en est résulté d'abord la recherche d'un nombre considérable de méthodes, — chaque auteur tenant la sienne pour la plus simple, alors qu'elle n'était en général que celle à laquelle il était le plus habitué, — destinées à faciliter le calcul en question; ensuite la nécessité de développer la culture et l'instruction des navigateurs; le problème n'étant pas de ceux qui peuvent se résoudre par de simples recettes, mais nécessitant de la réflexion.

Il se décompose en trois parties qui doivent être traitées indépendamment les unes des autres. En premier lieu, il faut prédire les distances vraies du centre de la Lune à un astre donné, pour les temps du premier méridien. A cela, les coordonnées équatoriales ou écliptiques de la Lune et des astres utilisés sont nécessaires et suffisantes. D'autre part, il faut, de la distance mesurée, conclure la distance vraie au centre de la Terre afin d'en déduire, par comparaison avec les distances calculées à l'avance, l'heure du méridien origine à laquelle elle correspond. Pour cette opération, il était inutile, étant donnée la précision que l'on pouvait obtenir au XVIII^e siècle, de s'inquiéter de l'ellipticité de la Terre. L'erreur qui en résulte est en effet égale à 6′ au maximum pour la Lune moyenne. Aussi, si on en croit Ledieu, les marins ne s'en préoccupaient pas encore en 1873. Cependant, Borda, dans les descriptions de son cercle, calcule laborieusement cette correction. Il est même curieux qu'il n'ait pas songé à faire ce calcul en utilisant le zénith des parallaxes, ce qui le simplifie beaucoup. Or, cette méthode, due à Clairaut, avait été largement appliquée par Mayer.

Voici, en tout cas, le principe de la détermination de la distance vraie quand on suppose la terre sphérique. Soit L la position vraie de la Lune (fig. 56). OS la direction allant de l'observateur au second astre. S la perspective du second astre sur la sphère de centre O et de rayon OL. Les astres sont relevés par la réfraction sur les verticaux ZL et ZS, en l et s. Donc l'observateur en O mesure l'angle lOs. Joignons le centre T de la Terre à la Lune et à l'astre. Soit TS_1 la ligne allant de T à l'astre. L'angle au centre de la Terre est LTS_1. Le problème consiste à passer de lOs à LTS_1. Menons Ol_1 parallèle à TL et Os_1 parallèle à TS_1 ; Ll_1 est la parallaxe de hauteur de la Lune, Ss_1 celle du second astre et les angles l_1Os_1 et LTS_1 sont égaux. Ceci posé, si h et h_1 sont les hauteurs apparentes des astres, H et H_1, leurs hauteurs vraies, on a dans les triangles apparent lZs et vrai l_1Zs_1, en appelant d et D les distances mesurée ls et vraie l_1s_1 et A l'angle LZS :

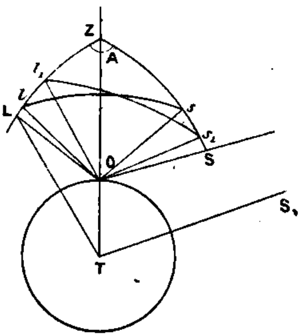

Fig. 56.

$$\text{Cos } d = \sin h \sin h_1 + \cos h \cos h_1 \cos A.$$
$$\text{Cos D} = \sin \text{H} \sin \text{H}_1 + \cos \text{H} \cos \text{H}_1 \cos A.$$

L'élimination de A entre ces deux équations donne donc D en fonction des quantités restantes. Mais on voit qu'il faut avoir les hauteurs vraies et apparentes des astres. Au XVIII^e siècle on observait en général ces dernières et on passait aux hauteurs vraies en calculant les réfractions et les parallaxes. Ces calculs doivent être faits avec une grande précision, tandis que les hauteurs peuvent être approchées à quelques minutes sans qu'il en résulte d'erreurs sensibles. Enfin, comme la distance mesurée se rapporte aux bords des astres, il faut la corriger de leurs demi-diamètres pour la rapporter à leur centre. Ces calculs préparatoires des réfractions, des parallaxes et des demi-diamètres forment la seconde partie du problème. On ne peut s'en dispenser et ils constituent un ensemble. C'est la partie délicate de la question.

Les calculs une fois effectués on peut passer à l'élimination de l'angle A des formules ci-dessus. C'est sur cette élimination, sur ce simple troisième calcul, un peu long, peut-être, mais mécanique et sans difficultés, que se sont exercés les chercheurs, comme nous allons le voir.

Exposons d'abord quelques procédés spéciaux. D'Après calculait deux distances apparentes pour deux lieux dont les longitudes étaient sa longitude estimée et cette longitude augmentée de 20^m de temps, soit de 5°. Il pouvait faire ce calcul puisque l'heure locale et la longitude lui donnaient l'heure de Paris avec laquelle il obtenait les coordonnées célestes des astres puis leurs coordonnées horizontales dans le lieu. Une simple interpolation lui donnait alors sa vraie longitude qui correspondait à la valeur mesurée de la distance apparente. C'était la méthode de fausse position proposée par Halley.

La Caille eut l'idée d'une autre méthode qui contenait les germes des méthodes différentielles et des méthodes par graphiques ou par machines très employées dans les solutions ultérieures. En développant la différence entre la distance vraie D et la distance apparente d en série procédant suivant les puissances croissantes des petites quantités ll_1 et ss_1, c'est-à-dire des fonctions Réfraction — Parallaxe de chaque astre, on peut obtenir un grand nombre de développements dont les deux premiers termes sont :

$$(\mathrm{P}-\mathrm{R})_{☾} \cos Zls - (\mathrm{R}-\mathrm{P})_{*} \cos Zsl$$

ce que l'on peut voir géométriquement. La Caille, pour faire la réduction, se contentait des calculs de ces deux premiers termes. L'idée de ce procédé lui était vraisemblablement venue à la suite de la lecture du traité de Cotes, intitulé *Estimatio Errorum*, qu'il cita avec éloges et qui jouit alors en France, grâce à lui, d'une grande faveur. D'autre part, La Caille eut encore l'idée de calculer graphiquement les deux termes de la formule donnant la réduction, les parallaxes, les réfractions, le temps de Paris et l'angle horaire, en un mot toutes les parties du calcul. Son graphique se trouve dans le mémoire de 1759 et il est inséré plusieurs fois dans la *Connaissance des Temps* à partir de 1761. Il comprend d'abord trois petits abaques destinés aux calculs des parallaxes de hauteur et des réfractions et à celui de la variation de la hauteur avec le temps; puis un châssis de réduction consistant en un cercle gradué de 17 à 18 pouces (47 à 49 cm.) de diamètre et destiné à représenter un méridien. Il indiquait les moyens d'obtenir l'angle horaire et les cosinus des angles l et s par des constructions analogues à celle dont nous avons parlé au chapitre consacré à l'heure locale, et il estimait que la construction graphique pour l'angle horaire avait la précision du calcul trigonométrique dans lequel on négligeait les secondes de degré, ce qui est fait pour surprendre, bien qu'il obtînt une valeur égale à quatre fois celle de l'angle horaire, car sur un cercle de 48 centimètres de diamètre un arc de 4′ est représenté par une longueur de 0 mm. 25 seulement. Lalande donnait cette méthode, sans démonstration, comme un moyen d'avoir la longitude sur mer par la Lune, sans calcul, en une heure de temps, et il ajoutait qu' « on pouvait la regarder comme le dernier pas de ce qui restait à faire pour mettre le secret des longitudes à la portée de tout le monde ».

La méthode de Charnières était extrêmement laborieuse. De l'observation de la distance il déduisait, dans le triangle formé par le pôle de l'écliptique, la Lune et l'astre, la longitude vraie de la Lune, qu'il comparait à la longitude approchée calculée avec le temps de Paris obtenu au moyen du temps local et de la longitude estimée. Connaissant d'autre part la variation de la longitude de la Lune, il en concluait le temps de Paris exact, inconnue du problème. Il faisait le calcul des parallaxes en longitude et latitude par le nonagésime. Soit (fig. 57) Z le zénith, p le pôle de l'écliptique, L et l les lieux vrai et apparent de la Lune. Ll est la parallaxe de hauteur et l'angle LpA, égal à AL multiplié par la sécante de la latitude de la Lune, est la parallaxe en longitude. Pour la calculer, Charnières se servait de l'angle l qu'il déterminait dans le triangle Zpl. Pour cela il suffisait de connaître l'angle en p et le côté Zp, puisque le côté Zl était donné par l'observation. Soit maintenant N_0 le nonagésime, NZS le méridien, Qγ l'équateur, Eγ l'écliptique, Q le « milieu du ciel », E le « point culminant », A_1 est le pôle de pZN_0H et $pZ = N_0H = EA_1S$. Le triangle rectangle EγQ où on connaît ω et γQ, temps sidéral local, donne γE, EQ et l'angle A_1ES. Ceci effectué, le triangle rectangle EA_1S ou ES = EQ + colatitude, permet de calculer l'angle EA_1S et le côté A_1E. Enfin de A_1E on déduit $\gamma N_0 = \gamma E - EN_0 = \gamma E - A_1E + 90$. On peut obtenir ainsi la hauteur et la longitude du nonagésime ; or cette hauteur est le Zp cherché et l'angle en p du triangle Zpl est égal à la différence entre les longitudes de la Lune et du nonagésime. On peut donc faire le calcul de la parallaxe.

Ce calcul des parallaxes par le nonagésime, point ainsi nommé parce qu'il est à 90° de l'intersection de l'écliptique et de l'horizon, fut très employé dans les calculs relatifs aux éclipses. Aussi Képler et Riccioli commencèrent-ils, en 1627 et 1665, à donner des tables de la hauteur et de la longitude du nonagésime. La *Connaissance des Temps* en publia aussi à plusieurs reprises ; en 1767 celles de Lalande pour la latitude de Paris ; en 1775 celles des latitudes de 41°, 43°, 45°, 47°, 51°28′ : latitude de Greenwich, 52°31′ : latitude de Berlin, 55°, 57° et 59° ; en 1776 celles des latitudes de Vienne, Bologne et Saint-Pétersbourg ; en 1777 de Dantzig. Enfin en 1779, Levêque, de Nantes, avait calculé des tables générales dans lesquelles la latitude variait de degré en degré. Dans le même ordre d'idées, Lemonnier avait aussi fait construire un compas sphérique qui permettait de mesurer l'angle de position sur un globe de dimensions raisonnables.

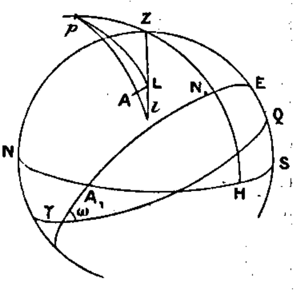

Fig. 57.

Il y avait un calcul qu'on pouvait faire à l'avance et donner dans des éphémérides et qui devait simplifier les réductions. C'était celui des distances vraies pour les temps du premier méridien. La Caille en avait tracé le plan et le modèle. Il avait proposé de faire les calculs des distances vraies de la Lune au Soleil et à quelques belles étoiles, de 4 heures en 4 heures. La *Connaissance des Temps* de 1761 en contient, dans ses notices, quelques exemples, destinés à illustrer l'idée en question. Mais pour exécuter ce projet il fallait du temps et de l'argent.

L'Angleterre nous devança dans cette exécution, et, là encore, le passage de Vénus de 1761 fut l'occasion d'un progrès de la longitude à la mer. Maskelyne était allé observer ce passage à Sainte-Hélène. Il fit dans ce voyage ce que La Caille avait fait dix ans auparavant et il se rangea à l'avis de ce dernier. Dès 1763, il proposa, dans son *British Mariner's Guide,* ouvrage qui paraît avoir été très peu répandu chez nous, puisque Rochon ne put se le procurer pour ses voyages, d'adopter le plan de l'astronome français. Il ne s'en tint pas là et il obtint, après des instances tenaces, la publication de l'almanach dont la forme avait été donnée en France. En 1767, paraissait le premier volume du *Nautical Almanac*. Il était publié par Nevil Maskelyne « en vertu d'un acte du Parlement de la cinquième année du règne de George III et par ordre des commissaires de la longitude ». L'ouvrage, qui avait pour but de contribuer grandement aux perfectionnements de l'astronomie, de la géographie et de la navigation, devait être publié chaque année, et il le fut en effet. On y annonçait que Mayer ayant porté les tables de la Lune à un degré d'exactitude suffisant pour avoir la longitude à la mer à 1° près, comme il apparaissait par plusieurs essais, les calculs relatifs au Soleil et à la Lune avaient été faits sur ses manuscrits reçus après son décès. Chaque mois, on donnait quatre pages de distances de la Lune au Soleil et à α Aigle, β Capricorne, Antarès, l'Épi, Régulus, Pollux, Aldébaran, α Bélier et α Pégase. Elles étaient calculées de 3 heures en 3 heures, ce qui constituait une légère amélioration sur le projet de La Caille. Les distances du Soleil à la Lune étaient comprises entre 40 et 120°. Quand la Lune était à une distance du Soleil comprise entre 20 et 40°, on ne donnait que des distances à une étoile opposée au Soleil par rapport à la Lune. Pour les distances lunisolaires variant de 40 à 90°, on ajoutait aux distances du Soleil à la Lune des distances à une étoile opposée au Soleil. Enfin, quand la Lune était éloignée du Soleil de 90 à 120°, l'almanach contenait des distances au Soleil et à deux étoiles situées de part et d'autre de la Lune. On recommandait d'ailleurs de faire simultanément des observations de distances à des astres situés à l'est et à l'ouest de la Lune, le procédé éliminant les erreurs instrumentales, d'autant mieux que les distances étaient plus voisines. Dans ce cas, on pouvait obtenir la longitude à 10 milles près.

Le *Nautical* eut un grand succès. En 1769, un membre de l'*Académie de Marine,* Trémargat, s'offrit pour faire sa traduction. En 1771, l'Académie se prononçait en faveur des distances lunaires et Blondeau lut en séance un extrait de l'annuaire anglais. Puis, le 20 mai, on résolut d'écrire à Lalande pour lui demander de le faire venir, et surtout celui de 1767. On le priait également de s'occuper de le faire traduire, sans quoi l'Académie s'en occuperait elle-même. Elle publia, en effet, les huit derniers mois de 1772, et cette même année elle fit paraître des *Tables et instructions propres à la détermination des Longitudes en Mer* pour l'année 1773. L'ouvrage était imprimé à Brest, chez Malassis, par ordre de l'*Académie de Marine*. C'était une simple traduction des tables des distances du *Nautical Almanac,* pour les temps de Greenwich. L'Académie y annonçait qu'elle aurait soin de se procurer tous les ans l'almanach anglais, aussitôt paru, et de le publier un mois après en France, en attendant que les circonstances lui permettent de le donner au public sans avoir recours aux étrangers. Elle estimait que l'erreur sur la longitude devait être en général inférieure à 1° et qu'elle ne pouvait guère dépasser un maximum de 2°. Comme méthode de réduction, elle proposait la plus immédiate. On calculait l'angle A dans le triangle apparent et, cet angle étant connu, le triangle vrai donnait la distance vraie.

Mais aussitôt Lalande écrivit à l'Académie qu'il espérait lui épargner à l'avenir la peine de rédiger cet almanach, car il comptait mettre les distances du *Nautical* dans la *Connaissance des Temps,* ce qui eut lieu, en effet, dès 1774. « J'ai cru rendre service, écrivait-il en 1775, en insérant ces calculs importants que nous devons au zèle et à la magnificence du Gouvernement d'Angleterre et du Bureau des Longitudes. » Maskelyne, « avec le zèle d'un savant, me les a envoyés, disait-il encore, aussitôt qu'il a été possible ». Jusqu'en 1778, la *Connaissance des Temps* publia purement et simplement les tables anglaises pour les temps de Greenwich. En 1778, Jeaurat les donna pour les temps de Paris. En 1800, d'ailleurs, une partie des distances fut de nouveau extraite de l'annuaire anglais, mais on devait les recalculer en France le « plus tôt possible ». Cela paraît n'avoir recommencé que vers 1808. En 1833, enfin, on commença à donner les distances aux planètes. Les premiers calculs de la distance de la Lune à des planètes avaient été faits à Florence et à Copenhague; mais Lalande avait proposé, dès 1779, les distances à Vénus et en 1783 les distances à Saturne.

On conçoit que Lalande ait tardé à reproduire l'almanach anglais qui, dès sa naissance, était plus complet que la *Connaissance des Temps,* vieille, en 1767, de 88 ans, car il devait désirer ne publier que des calculs faits en France. Delambre raconte que lorsque Lalande se présenta pour la succession de Maraldi, vers 1759, comme membre de l'Académie chargé de la *Connaissance des Temps* (ce membre recevait alors 1.200 livres par an), il avait pour compétiteur Pingré, et il fait remarquer que le choix de Lalande fut heureux pour la navigation, car il tenait pour la méthode des distances et pour les tables de Mayer, tandis que Pingré, nous le savons, penchait vers le calcul par l'angle horaire au moyen des tables de Lemonnier. De sorte que le retard dont nous avons parlé ci-dessus aurait pu être plus grand encore.

Revenons maintenant à l'élimination de l'angle A. On peut la faire en cherchant une formule donnant la distance vraie, et on obtient ainsi les « solutions directes ». La méthode de calcul direct du troisième côté d'un triangle sphérique dont on connaît deux côtés et l'angle compris, sans décomposer le triangle en triangles rectangles, remonte, d'après Borda et Lévêque, à 1706 au moins. C'est Dunthorne qui l'a appliquée le premier aux distances lunaires. Sa formule est la suivante :

$$\cos D = \cos (H - H_1) - [\cos (h - h_1) - \cos d] \frac{\cos H \cos H_1}{\cos h \cos h_1}.$$

Elle se trouve dans le *Nautical* de 1767. Dunthorne mit en tables la fraction qui multiplie la parenthèse, fonction qu'on retrouve dans toutes les formules de cette catégorie. Borda a donné une autre formule du même genre. Elle est basée sur le calcul d'un angle auxiliaire. On la voit dans la relation du voyage de la *Flore*, publiée en 1778, et dans la *Connaissance des Temps* de 1779. Si on pose :

$$2 S = h + h_1 + d$$

$$\sin^2 M = \frac{\cos H \cos H_1}{\cos h \cos h_1} \frac{\cos S \cos (S - d)}{\cos^2 1/2 (H + H_1)}$$

on a :

$$\sin \frac{D}{2} = \cos \frac{H + H_1}{2} \cos M.$$

Cette formule a le grand avantage de ne pas exiger de tables spéciales, les tables ordinaires de logarithmes suffisent et c'est sans doute pour cette raison qu'elle a fini par s'imposer presque exclusivement dans la pratique. D'autres formules du même genre ont été proposées ; par exemple, en France, par Romme, en 1789, et par Delambre ; à l'étranger par Maskelyne, qui déterminait l'angle auxiliaire par une tangente et non par un sinus, de sorte que sa formule, légèrement moins simple que celle de Borda, était un peu plus exacte.

En 1795, un Espagnol, Mendoza, fit connaître un procédé nouveau qui consistait à employer les sinus et susinus verses, c'est-à-dire les fonctions 1 — cosinus et 1 + cosinus, lignes trigonométriques toujours positives. Sa formule est la suivante :

$$\begin{aligned} \sin v.\, D = [\sin v\,(d + B) + \sin v.\,(d - B)] + [\text{susin } v.\,(H + H_1)] \\ + [\sin v\,(h + h_1 + B) + \sin v.\,(h + h_1 - B)] - 4 \end{aligned}$$

où on a :

$$2 \cos B = \frac{\cos H \cos H_1}{\cos h \cos h_1}.$$

En 1805 il fit paraître en Angleterre, où il s'était établi, des tables donnant les trois termes entre crochets. Il paraît qu'il se pendit, désespéré d'une faute de calcul qu'on y avait découverte. La première édition française de ces tables n'est que de 1842. La préface qui les accompagne est une réclame sur leurs avantages. L'éditeur Richard annonce que le calcul qui leur est relatif est si rapide qu'il est rendu aussi court que celui d'un angle horaire. Delambre accorda publiquement, dans la *Connaissance des Temps,* de 1806 à 1808, ses préférences au nouveau procédé, même sur le sien et celui de Borda, et Lalande n'eût, paraît-il, pas confié son exemplaire, reçu de l'auteur, à son meilleur ami. Il ne devait cependant pas beaucoup s'en servir, si même il s'en servit jamais. L'officier français qui les utilisa le plus fut sans doute Rossel, qui les employa à la vérification des calculs des distances prises pendant le voyage de Dentrecasteaux, observations qui avaient d'abord été réduites par la méthode de Borda.

La méthode différentielle de La Caille eut beaucoup d'imitateurs. Mais la formule qu'il a donnée, réduite à ses deux premiers termes, ne peut s'employer avec quelque rigueur que pour des distances comprises entre 75 et 105°. Pour les autres, il est nécessaire de pousser le développement plus loin; les termes du second ordre contiennent en effet les facteurs cotg d ou cosec d. Ces méthodes différentielles furent surtout employées en Angleterre et elles sont intimement liées aux méthodes graphiques. C'est par une méthode de l'espèce, due à Lyons et donnée dans le premier *Nautical*, que Shepherd fit calculer les immenses tables de réduction dont nous allons parler. Ces tables, de 1.200 grandes pages, parurent en 1772, par ordre des Commissaires de la longitude. Elles rendaient la réduction très simple. Elles furent calculées par Lyons, Parkinson le jeune et Williams, du collège de Christ, à Cambridge. Pour les construire, on a fait varier les distances apparentes de 4 en 4°, et, pour les distances intermédiaires, on a interpolé en tenant compte des différences secondes. Les distances y vont de 10 à 120° en croissant de degré en degré. En tête de chaque page, se trouve la distance apparente. Dans la page on trouve cinq groupes de cinq colonnes, constituées de la manière suivante. La première, à gauche, contient la hauteur apparente de la Lune; la deuxième celle de l'étoile, la troisième la réduction pour une parallaxe de 53′, qui est la plus petite parallaxe lunaire, et pour une réfraction correspondant à une hauteur barométrique de 28 pouces 1 ligne (760 mm.) et une température de 10°25 (12°8). La quatrième colonne contient le logarithme logistique de la variation de la réduction pour une augmentation de la parallaxe de 9′, la dernière celui de la variation pour un changement de la réfraction dû à une variation de la pression atmosphérique égale à 16,51 lignes (37 mm.), et à une variation de la température de 8°8/9 (11°) (1).

Avec les tables de Shepherd, on admettait qu'un pilote, sans connaître ni astronomie, ni méthode de calcul, pouvait, en une

(1) Les logarithmes logistiques étaient destinés au calcul des proportions dans lesquelles le terme inconnu est multiplié par 3.600. Le logarithme logistique d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre diminué du logarithme de 3.600, et si x est le nombre cherché, a et b les deux quantités de la proportion autres que 3.600, on a log. logistique x = log. logis. a + log. logis. b.

demi-heure, avoir sa longitude à 0°5. Mais les interpolations y étaient longues et assez pénibles, bien que Lalande eût déclaré qu'elles ne demandaient que 7 à 8 minutes ; et c'est leur principal défaut, sans compter leur prix élevé. Elles étaient, en effet, vendues en France 48 livres. On fit davantage encore. Margetts, en 1790, mit en graphiques les tables de Shepherd, sur 110 grandes figures en 70 planches. La meilleure édition est celle de 1793. Elle est à très grande échelle et les figures y sont très nettes. Les hauteurs de la Lune sont portées de degré en degré sur des lignes verticales. La hauteur de l'astre est figurée par les ordonnées de lignes courbes obliques. La correction à apporter à la distance apparente pour la parallaxe de 53′ est représentée par des droites horizontales distantes de 1′. La correction pour la variation de la parallaxe se trouve à part. Les graphiques de Margetts donnaient une précision de 10 à 12″, ce qui était surabondant.

En France, Maingon, « un des marins français qui ont le plus fait usage des observations de longitude », et Rochon construisirent des graphiques tout différents. La formule de Maingon contenait un terme de plus que celle de Rochon et deux termes de plus que celle de La Caille. La carte de Maingon contient d'abord quatre échelles donnant les coefficients de sa formule, qui sont des fonctions des réfractions et des parallaxes ; enfin un quartier de réduction, abaque familier aux marins, permettant d'effectuer les multiplications ou divisions des coefficients par les lignes trigonométriques avec lesquelles ils étaient combinés dans la formule.

Rochon aussi se servait du quartier de réduction ou de tables en tenant lieu. Borda et Lévêque, chargés du rapport sur la carte de Maingon, lui donnent, dans leurs conclusions, la préférence sur tous les autres procédés graphiques.

Rochon avait aussi imaginé un compas sphérique destiné à construire les triangles vrai et apparent, mais l'instrument le plus curieux dans cet ordre d'idées est le triangle de Richer. L'Académie avait proposé pour sujet du prix Raynal de 1790, de « trouver pour la réduction de la distance apparente de deux astres en distance vraie une méthode sûre et rigoureuse qui n'exige cependant dans la pratique que des calculs simples à la portée du commun des navigateurs ». Leguin proposa un compas à quatre branches, mais c'est le triangle de Richer qui fut couronné, le 4 mai 1791. Richer avait réalisé une remarque de Lagrange qui avait démontré que si

$$90 - h;\ 90 - h_1;\ d$$

$$\cos \frac{h + h_1}{2} + \sin \frac{h - h_1}{2};\ \cos \frac{h + h_1}{2} - \sin \frac{h - h_1}{2};\ 2 \sin \frac{d}{2}$$

sont respectivement les côtés d'un triangle sphérique et d'un triangle rectiligne, les angles de ces triangles opposés aux côtés d et $2 \sin \frac{d}{2}$ sont égaux. Cela se démontre en écrivant la relation métrique qui donne le carré d'un côté d'un triangle rectiligne en fonction des autres côtés et du cosinus de l'angle compris. On tombe en effet alors sur la formule fondamentale des triangles sphériques. D'où il est facile de s'expliquer l'instrument de Richer. Cette machine n'était toutefois ni très commode, « ni très facile, ni très prompte. Elle exigeait de l'intelligence, de l'adresse et de l'habileté ». Elle donnait la réduction à une approximation suffisante pour avoir la longitude à 30′. Cependant elle avait des défauts. Les microscopes étaient divisés par parties égales alors que leurs divisions devaient varier avec leurs positions sur les règles, graduées elles-mêmes par parties inégales. Richer l'améliora en 1801. Enfin il coûtait très cher.

Borda jugeait sévèrement toutes ces méthodes graphiques et instrumentales. « Elles ont l'inconvénient, dit-il, d'habituer à un travail automatique des esprits qui n'y sont que trop disposés », et « sous le rapport de la théorie, elles sont plus compliquées que les méthodes rigoureuses ». D'ailleurs « elles ne dispensent pas entièrement du calcul ». Tout de même il reconnaissait qu'elles pouvaient rendre des services comme moyen rapide de vérification de calculs déjà effectués, et, en résumé, il pensait que la meilleure manière d'éviter aux navigateurs les difficultés et les embarras d'un calcul était de leur apprendre à calculer. Delambre enfin n'était pas plus tendre que Borda. « C'est pour ménager les préjugés des marins, dit-il, que La Caille construisit son châssis de réduction. Sa méthode est adroite, mais on ne peut que regretter la peine qu'il a prise à la composer. On serait tenté de croire qu'en imaginant ces pratiques ingénieuses, mais obscures et compliquées, il a voulu dégoûter les marins de ces moyens pénibles et inexacts. »

Nous terminerons ce chapitre par une curieuse idée de Rochon, qui ne pouvait manquer de trouver dans le calcul des distances lunaires une occasion d'utiliser les prismes qu'il proposait d'employer à tout. Il imagina d'ajuster à l'octant, derrière le petit miroir, un prisme donnant 1° de déviation au rayon qui le traversait, l'arête de ce prisme étant horizontale et pouvant se placer par retournement soit vers le haut, soit vers le bas. En mesurant les distances de l'astre à la Lune vue directement dans les deux positions du prisme, on pouvait obtenir deux distances correspondant à deux hauteurs de la Lune différant de 2°. Donc on pouvait en déduire par proportion la variation de la distance pour une variation de la hauteur de la Lune égale à sa parallaxe moins sa réfraction; et en ajoutant cette variation à la distance apparente mesurée sans prisme, et faisant les mêmes opérations sur le second astre, on pouvait avoir la distance réduite. Pour mettre l'arête du prisme horizontale il suffisait d'un repère ou d'une bulle ménagée dans le liquide contenu entre les deux parties d'un prisme double. Ainsi Rochon, à lui seul, proposa trois systèmes. On n'est plus étonné alors de pouvoir compter aujourd'hui une centaine de méthodes pour l'élimination cherchée.

Il reste à dire un mot des tables de logarithmes employées d'ordinaire. En 1742, Gardiner avait donné une édition à sept décimales des tables de logarithmes de Vlacq. Elles contenaient les logarithmes des sinus de seconde en seconde pour les 72 premières minutes. Ces tables firent négliger toutes les précédentes. En 1770 elles furent réimprimées à Avignon par Pézenas, avec les sinus et les tangentes de seconde en seconde pour les quatre premiers degrés. Pézenas avait extrait ces derniers logarithmes de Mouton qui les avait calculés à dix décimales. Enfin en 1783 et 1795, Callet fit des éditions portatives des tables de Gardiner. La première contenait les sinus et les tangentes de seconde en seconde pour les deux premiers degrés, la deuxième pour les cinq premiers. Ces tables furent alors les plus commodes, mais celles de La Caille, à six décimales seulement, étaient aussi recommandées.